

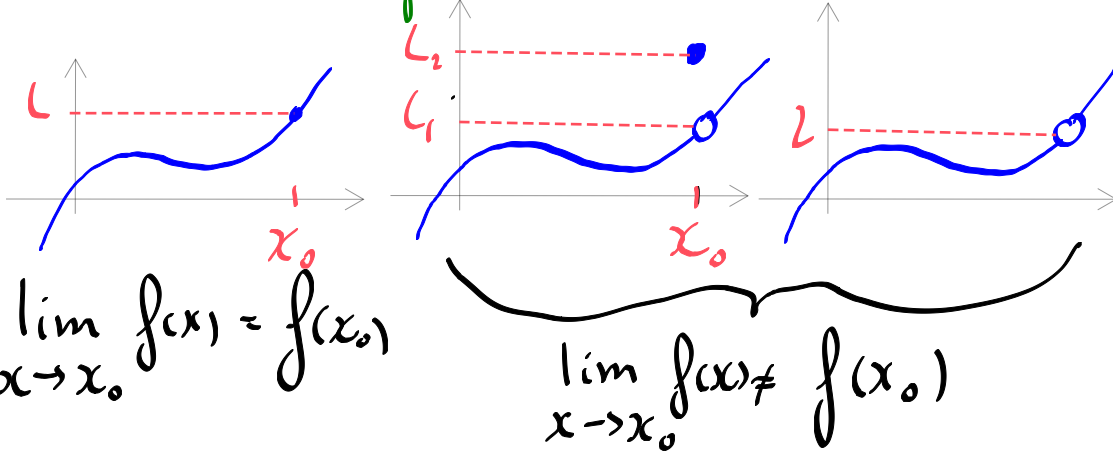
Limites $x \rightarrow x_0$ (limites ponctuelles)

Intuition :

$f(x)$ est proche de

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff L$ quand x est proche de x_0

↑ limite ponctuelle



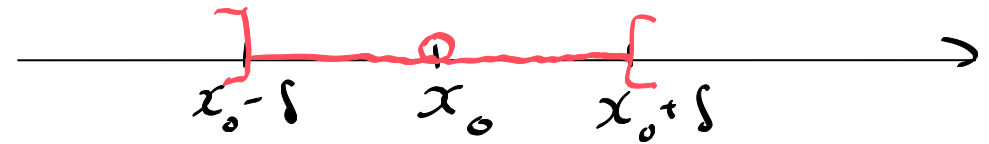
La valeur de $f(x_0)$ n'a pas d'impact sur $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Ce qui compte c'est le comportement de $f(x)$ sur un voisinage épointé de x_0

Déf Un voisinage épointé de x_0 c'est un voisinage de x_0 sans le x_0 .

Exemple Soit $\delta > 0$

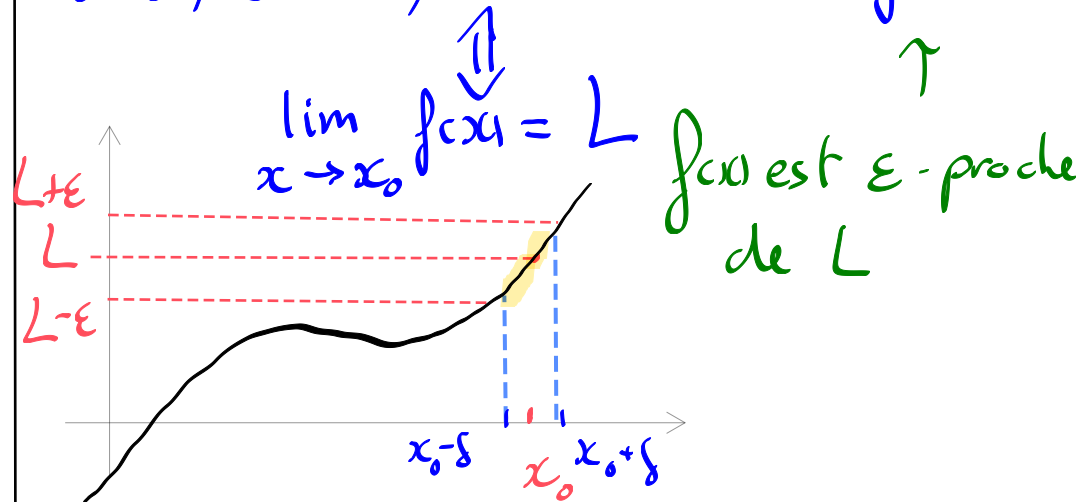
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

↑ $x \neq x_0$



Définition formelle d'une limite ponctuelle

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Exemples • Soit f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|f(x) - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon$$

On suppose que $x \neq 2$

$$3|x - 2| < \varepsilon ; |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow$ On peut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ et on a

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

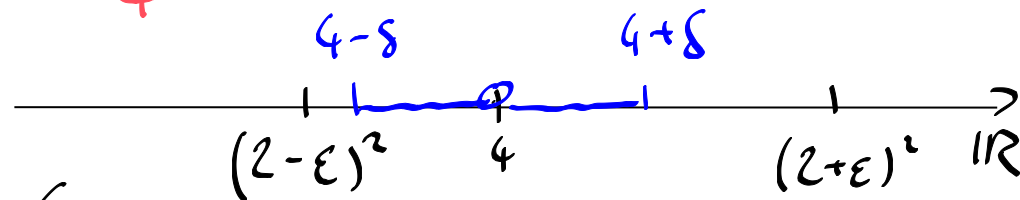
• Soit f la fonction $f(x) = \sqrt{x}$
On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$
Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$$

$$2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon$$

$$(2 - \varepsilon)^2 < x < (2 + \varepsilon)^2$$

tous est positif



$\hookrightarrow$ On peut prendre $0 < \delta < 4 - (2 - \varepsilon)^2$

Ainsi, on a

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow (2 - \varepsilon)^2 < x < (2 + \varepsilon)^2 \\ \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

- Soit $f(x) = \sin(x)$

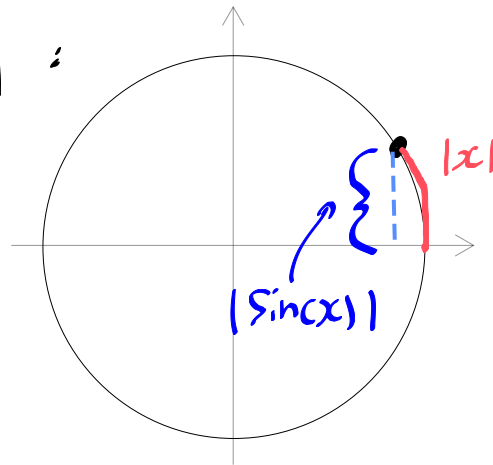
On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\sin(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Or } |\sin(x)| < |x| :$$

Donc prendre $\delta = \varepsilon$
suffit :



$$0 < |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x| < \varepsilon \Rightarrow |\sin(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

Les règles et théorèmes déjà vus
sur les limites restent vraies
pour les limites ponctuelles

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(x) = 0$

car $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\sin(x)$ est
bornée

(règle $0 \times \text{bornée}$)

- Parfois on doit rationaliser :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - (x+1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3 - (x+1)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+3} + x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2+x-2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3} + x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{(x+1)(\sqrt{x+3}+x+1)} = \frac{-3}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{-3}{8}$$

Les limites ponctuelles peuvent aussi être caractérisées par les suites

Théorème : Soit f une fct

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$\forall$ suite (x_n) tel que $x_n \rightarrow x_0$

(Comme avant, c'est surtout utile pour montrer qu'une limite n'existe pas!)

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On prend $a_n = \frac{1}{2n\pi}$

On a : $a_n \rightarrow 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n\pi)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

On prend $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

On a : $b_n \rightarrow 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

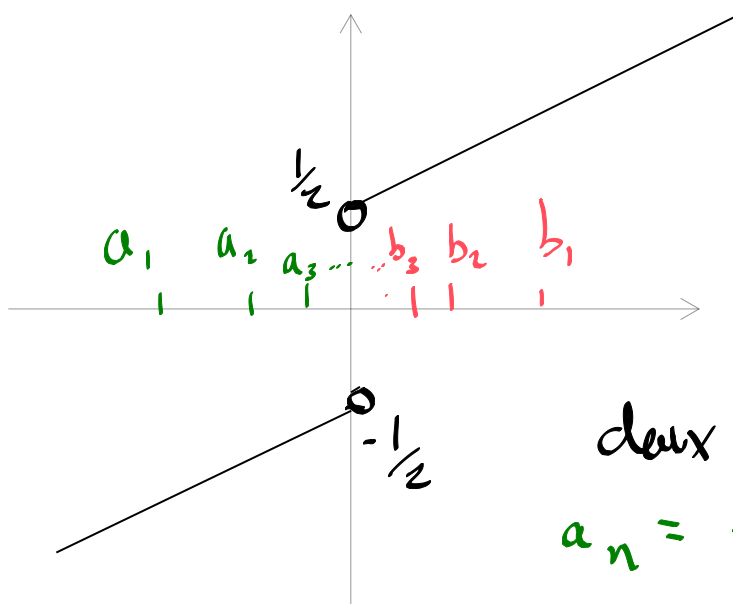
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

(Comme $1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas)

- Soit $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2|x|}$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Pour trouver le graphe de f , on le réécrit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Trouver
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

On considère

deux suites :

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

$$a_n \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2}$$

comme $a_n < 0$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{2} + \frac{1}{2}$$

comme $b_n > 0$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ la limite
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.